Адиабатические волноводные моды трехслойного интегрально оптического волновода

Д.В. Диваков[1,2], К.П. Ловецкий[1], А.Л. Севастьянов[3], А.А. Тютюнник[1,2]

[1]Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

Российский университет дружбы народов, 117198 Москва, Россия

[2]Объединенный институт ядерных исследований

[3]Высшая школа экономики

Аннотация

В работе рассматривается численное решение задачи волноводного распространения поляризованного света в плавном переходе планарного волновода. В рамках модели адиабатических волноводных мод система уравнений Максвелла сводится к системе четырех обыкновенных дифференциальных уравнений и двух алгебраических уравнений для шести компонент электромагнитного поля в нулевом приближении и стольких же уравнений в первом приближении. Многослойная структура волноводов позволяет осуществить редукцию задачи к однородной системе линейных алгебраических уравнений, условие нетривиальной разрешимости которой задает дисперсионное уравнение. Решены вспомогательные задачи на собственные значения и собственные векторы для описания адиабатических мод волновода. Приведены примеры решений задач одномодового волноводного распространения.

В работе используется модель адиабатических волноводных мод, основанная на асимптотическом подходе:

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\vec{E}_s(x;y,z)}{(-i\omega)^{\gamma+s}} exp\{i\omega t - ik_0\varphi(y,z)\}$$

$$\vec{H}(x,y,z,t) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\vec{H}_s(x;y,z)}{(-i\omega)^{\gamma+s}} exp\{i\omega t - ik_0\varphi(y,z)\}$$

Адиабатическое приближение решения уравнений Максвелла получается в нулевом и первом приближении разложения по $\frac{i}{\omega}$. При этом в двумерном волноводном переходе ($\frac{\partial}{\partial y} = 0$) для TE-поляризации получаются следующие уравнения для амплитуд $(E^y, H^z, H^x)^T$ электромагнитного поля:

в нулевом порядке

$$\begin{cases} \frac{d^2 E_0^y}{dx^2} + k_0^2 \left(\varepsilon\mu - \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 (z) \right) E_0^y = 0 \\ \mu H_0^x = -\left(\frac{d\varphi}{dz} \right) E_0^y \\ -ik_0 \mu H_0^z = \frac{dE_0^y}{dx} \end{cases} \quad (1)$$

в первом порядке (уточнение модели)

$$\begin{cases} \frac{d^2 E_1^y}{dx^2} + k_0^2 \left(\varepsilon\mu - \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 \right) E_1^y = k_0 \mu\omega \left(\frac{1}{\mu} \frac{d\varphi}{dz} \frac{dE_0^y}{dz} - \frac{dH_0^x}{dz} \right) \\ \mu H_1^x = -\left(\frac{d\varphi}{dz} E_1^y + \frac{\omega}{k_0} \frac{dE_0^y}{dz} \right) \\ -ik_0 \mu H_1^z = \frac{dE_1^y}{dx} \end{cases} \quad (2)$$

Сформулируем задачу отыскания решений уравнений (1) – (2) при физически обоснованных условиях:

$$\lim_{n \to \pm\infty} \left| E_0^y(x; z) \right| = 0, \quad \lim_{x \to \pm\infty} \left| E_1^y(x; z) \right| = 0 \quad (3)$$

Подходим к ее решению с помощью вспомогательной спектральной задачи:

$$\begin{cases} \left(\frac{d^2}{dx^2} + k_0 \varepsilon\mu \right) E_{k0}^y = k_0^2 \beta_k^2 E_{k0}^y \\ \mu H_{k0}^x = -\beta_k E_{k0}^x \\ H_{k0}^x = \frac{i}{k_0 \mu} \frac{dE_{k0}^y}{dx} \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \left(\frac{d^2}{dx^2} + k_0^2\varepsilon\mu\right)E_{k1}^y - k_0^2\beta_k^2 E_{k1}^y = k_0\mu\omega\left(\frac{\beta_k}{\mu}\frac{dE_{k0}^y}{dz} - \frac{dH_{k0}^x}{dz}\right) \\ H_{k1}^x + \frac{\beta_k}{\mu}E_{k1}^y = -\frac{\omega}{k_0\mu}\frac{dE_{k0}^y}{dz} \\ H_{k1}^z = \frac{i}{k_0\mu}\,\frac{dE_{k0}^y}{dx} \end{cases} \tag{5}$$

с асимптотическими условиями

$$\lim_{n\to\pm\infty}\left|E_{k0}^y(x;z)\right| = 0 \ \lim_{x\to\pm\infty}\left|E_{k1}^y(x;z)\right| = 0 \tag{6}$$

и условиями нормировки

$$\begin{gathered} \langle E_{k0}^y, E_{k0}^y\rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} E_{k0}^y(x;z)\overline{E_{k0}^y}(x;z)dx = 1 \\ \langle E_{k1}^y, E_{k1}^y\rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} E_{k1}^y(x;z)\overline{E_{k1}^y}(x;z)dx = 1 \end{gathered} \tag{7}$$

Приведем решение для компоненты E^y, оставшиеся две компоненты определяются из (4), (5) и вычисляются аналогично.

В частности E_0^y имеет вид:

$$\begin{aligned} &E_y^s(z) = A_s(z)\,exp\{\gamma_s(z)(x-a_1)\} \\ &E_y^f(z) = A_f^+(z)\,exp\{i\chi_f(z)(x-a_1)\} + A_f^-(z)\,exp\{-i\chi_f(z)(x-a_1)\} \\ &E_y^c(z) = A_c(z)\,exp\{-\gamma_c(z)(x-a_1)\} \end{aligned}$$

а $E_1^y = (E_1^y)gsh + (E_1^y)psn$, где решение однородной части системы (5) $(E_1^y)gsh$ имеет вид:

$$\begin{aligned} &\tilde{E}_y^s(z) = \tilde{A}_s(z)\,exp\{\gamma_s(z)(x-a_1)\} \\ &\tilde{E}_y^f(z) = \tilde{A}_f^+(z)\,exp\{i\chi_f(z)(x-a_1)\} + \tilde{A}_f^-(z)\,exp\{-i\chi_f(z)(x-a_1)\} \\ &\tilde{E}_y^c(z) = \tilde{A}_c(z)\,exp\{-\gamma_c(z)(x-a_1)\} \end{aligned}$$

А частное решение неоднородной системы (5) $(E_1^y)psn$ имеет вид:

$$E_s^p = \frac{k_0\omega\beta(z)}{2\gamma_s(z)}\Bigg(\Bigg(\Bigg(\left(-a_1 - x - \frac{1}{2\gamma_s(z)} - x^2\gamma_s(z) + 2a_1\gamma_s(z)\right)\frac{\gamma_c'}{\gamma_s(z)} \\ + \left(\frac{1}{2\gamma_s(z)} - \frac{x}{\beta(z)}\right)\beta'(z)\Bigg)A_s(z) + \left(-2x + \frac{1}{\gamma_s(z)}\right)\frac{\partial A_s(z)}{\partial z}\Bigg)e^{\gamma_s(z)(x-a_1)}$$

$$E_f^p = \frac{k_0\omega\beta(z)}{2\chi_f(z)}\left(\begin{array}{c}\left(-\frac{\beta'(z)}{2\chi_f(z)\beta(z)} - \chi_f' x^2 + 2\chi_f' + \frac{a_1 x \chi_f'}{2\chi_f^2}\right)A_f \\ +\left(\frac{i a_1 \chi_f'}{\chi_f(z)} + \frac{i x \beta'(z)}{\beta(z)} - \frac{i x \chi_f'}{\chi_f(z)}\right)\tilde{A}_f - \frac{(\partial A_f)}{\chi_f(z)} + 2ix(\partial\tilde{A}_f)\end{array}\right)$$

где $$A_f = A_f^+(z)e^{i\chi_f(z)(x-a_1)} + A_f^-(z)e^{-i\chi_f(z)(x-a_1)}$$

$$\tilde{A}_f = A_f^+(z)e^{i\chi_f(z)(x-a_1)} - A_f^-(z)e^{-i\chi_f(z)(x-a_1)}$$

$$\partial A_f = \frac{\partial A_f^+(z)}{\partial z}e^{i\chi_f(z)(x-a_1)} + \frac{\partial A_f^-(z)}{\partial z}e^{-i\chi_f(z)(x-a_1)}$$

$$\partial \tilde{A}_f = \frac{\partial A_f^+(z)}{\partial z}e^{i\chi_f(z)(x-a_1)} - \frac{\partial A_f^-(z)}{\partial z}e^{-i\chi_f(z)(x-a_1)}$$

$$E_c^p = \frac{k_0\omega\beta(z)}{2\gamma_c(z)}\left(\left(\left(a_1 - x - \frac{1}{2\gamma_c(z)} - x^2\gamma_c(z) + 2a_1\gamma_c(z)\right)\frac{\gamma_c'}{\gamma_c(z)} + \left(\frac{1}{2\gamma_c(z)} + \frac{x}{\beta(z)}\right)\beta'(z)\right)A_c(z) + \left(2x + \frac{1}{\gamma_c(z)}\right)\frac{\partial A_c(z)}{\partial z}\right)e^{-\gamma_c(z)(x-a_1)}$$

Решение основной задачи (1), (3) ищем в виде разложения по модам, т. е. решениям задачи (4)-(7):

$$E^y(x;z) = \sum_k c_k(z)E_k^y(x;z)$$

$$\frac{dE^y}{dx}(x;z) = \sum_k i\beta_k(z)c_k(z)E_k^y(x;z)$$

В случае одномодового режима уравнение для определения c_k значительно упрощается:

$$\frac{dc_k}{dz}(z) - i\beta_k(z)c_k(z) + \left[\frac{\beta_k'(z)}{2\beta_k(z)}\right]c_k(z) = 0$$

Его решение получено Каценеленбаумом в аналитическом виде:

$$c(z) = \frac{1}{\sqrt{\beta(z)}}exp\left\{ik_0\int_{z_0}^{z}\beta(z)dz\right\}$$

Полное решение задачи в итоге записывается в виде:

$$(E^y, H^z, H^x)^T = c(z)\left(E_0^y + \frac{i}{\omega}E_1^y, H_0^z + \frac{i}{\omega}H_1^z, H_0^x + \frac{i}{\omega}H_1^x\right)^T exp\{i\omega t - ik_0\varphi(z)\}$$