

Method of calculation of the wave propagation characteristics in the anisotropic two-components slab with hyperbolic type of dispersion

O.N. Kozina,

Kotel'nikov Institute of Radio-Engineering and Electronics of Russian Academy of Science, Saratov Branch Zelenaya 38, 410019, Saratov, Russia;

L.A. Melnikov

Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77 Politekhnikeskaya, 410054, Saratov, Russia

As known, engineering optical properties using artificial nanostructured media known as metamaterials has led to breakthrough devices with capabilities from super-resolution imaging to invisibility. One of the promising variant of the metamaterials are hyperbolic metamaterials (HMM) which possess anisotropic characteristics. Hyperbolic medium (HM) exhibits hyperbolic-type dispersion in space of wave-vectors and described by the diagonal extremely anisotropic permittivity tensor. This distinctive feature of the HM offers the challenge for multiple device applications and physical phenomena: negative refraction, epsilon-near-zero materials, superlenses, THz emission, nanoscale waveguiding, super-resolution imaging, quantum optics and many others.

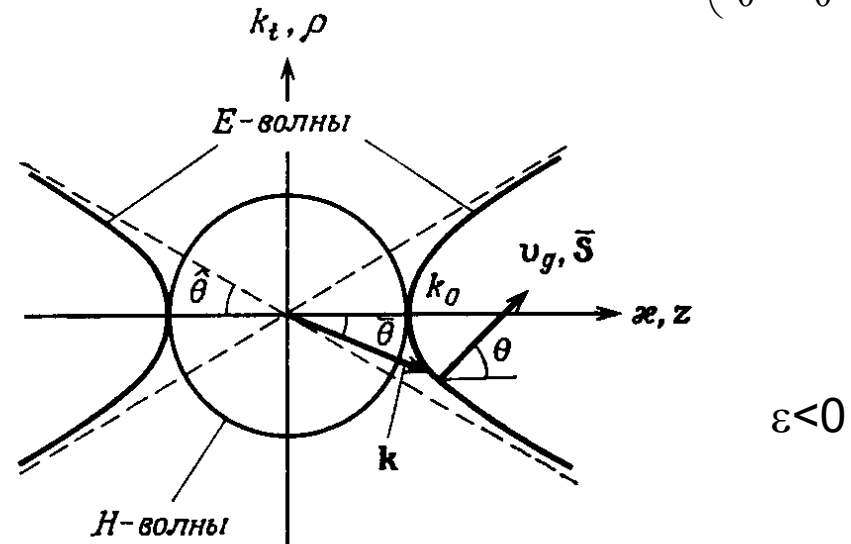
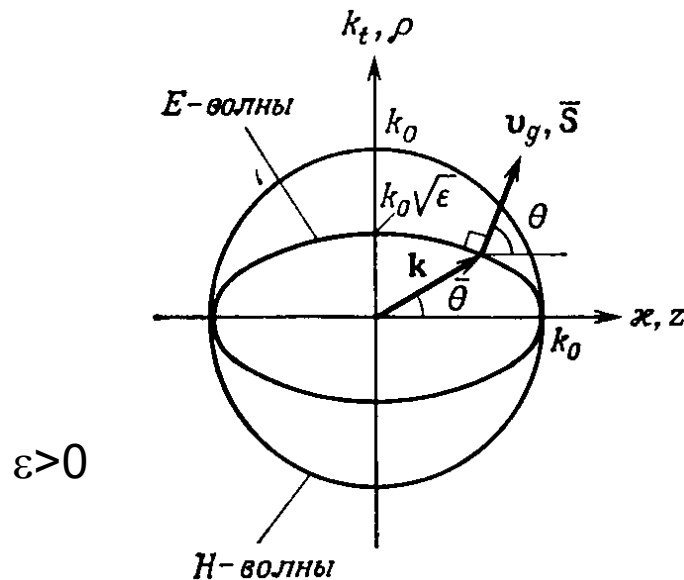
Materials with hyperbolic type of dispersion

Поверхности волновых векторов в одноосной анизотропной среде

$$\kappa \equiv \kappa' = \sqrt{k_0^2 \epsilon_t' - \left(\frac{k_t^2}{\epsilon}\right)} \quad \text{для } E\text{-волн,}$$

$$\kappa \equiv \kappa'' = \sqrt{k_0^2 \epsilon_t' - k_t^2} \quad \text{для } H\text{-волн}$$

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}$$



Hyperbolic medium exhibits hyperbolic-type dispersion in space of wave-vectors and has the diagonal extremely anisotropic permittivity tensor. The dispersive properties of the hyperbolic metamaterials are inherent to uniaxial materials whose axial and tangential permittivity components are of different signs.

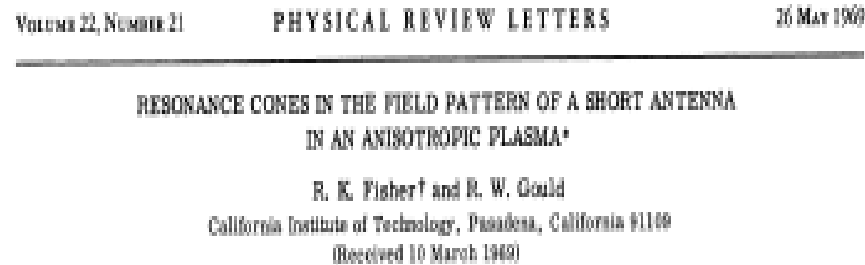
Федоров, Ф.И. *Оптика анизотропных сред* / Федоров, Ф.И. – АН БССР. Минск, 1958.

L.F. Felsen, N. Marcuvitz, *Radiation and Scattering of Waves*,
1973 (references to E. Arbel, L.B. Felsen, 1963)

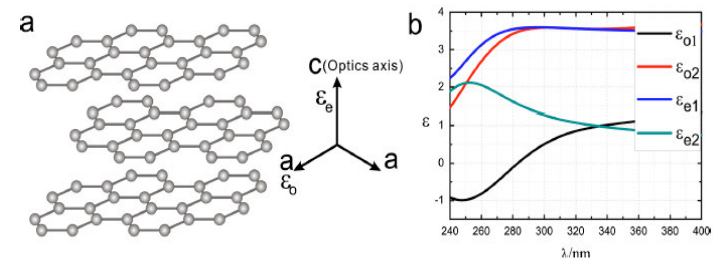
Hyperbolic medium exhibits hyperbolic-type dispersion in space of wave-vectors and has the diagonal extremely anisotropic permittivity tensor. The dispersive properties of the hyperbolic metamaterials are inherent to uniaxial materials whose axial and tangential permittivity components are of different signs.

Природные объекты

Magnetized plasma (for RF)



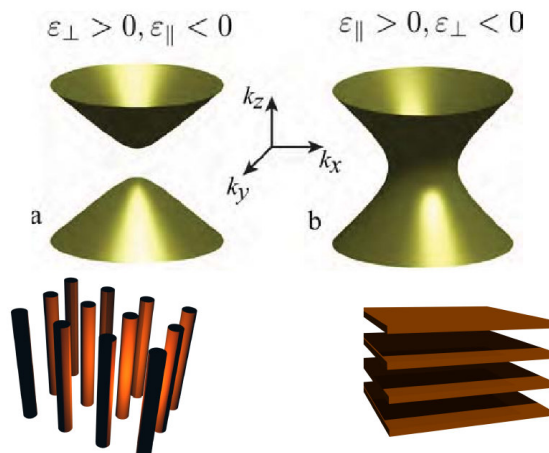
Graphite (for UV)



J. Sun et al. Appl. Phys. Lett. 98, 101901 (2011)

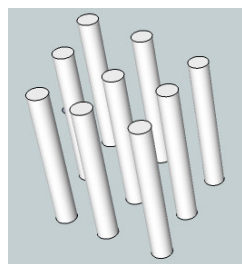
Метаматериалы

Два типа гиперболических сред



Гиперболические метаматериалы

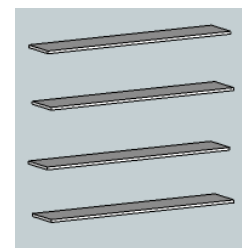
Проволочная структура



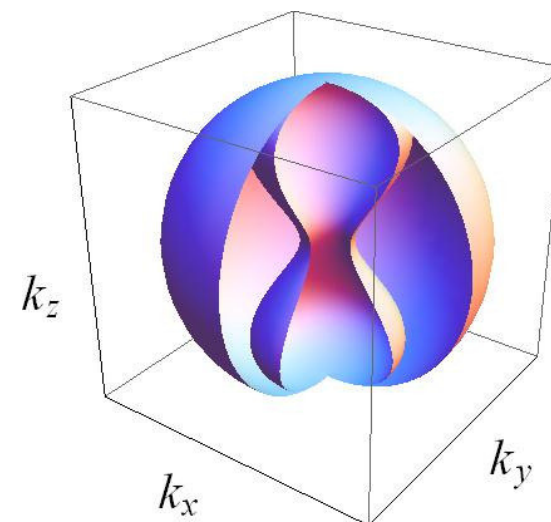
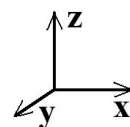
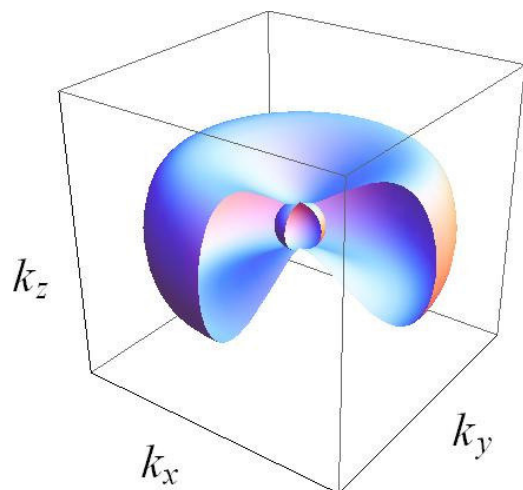
$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{yy} > 0 \\ \varepsilon_{zz} &< 0\end{aligned}$$

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

Планарная структура



$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{yy} < 0 \\ \varepsilon_{zz} &> 0\end{aligned}$$



The effective medium model

Метод гомогенизации, в котором композиционная структура рассматривается как некая эффективная среда с усредненными параметрами применим к структурам с размером элементарной ячейки (периодом) значительно меньше длины волны излучения, что соответствует условиям постановки задачи.

$$\varepsilon_{\parallel} = f\varepsilon_m + (1-f)\varepsilon_d$$

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{(1+f)\varepsilon_m\varepsilon_d + (1-f)\varepsilon_d^2}{(1-f)\varepsilon_m + (1+f)\varepsilon_d}$$

$$\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = f\varepsilon_m + (1-f)\varepsilon_d$$

$$\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon_{zz} = \frac{\varepsilon_m\varepsilon_d}{f\varepsilon_d + (1-f)\varepsilon_m}$$

$f = d_m/D$ – фактор заполнения среды металлом, d_m – толщина металлического слоя, d_m – диаметр металлического стержня

D – период структуры, ε_d – диэлектрическая проницаемость диэлектрика (или воздуха), ε_m – диэлектрическая проницаемость металла.

Метод Матриц Берремана 4x4

Матрица Берремана 4x4 описывает линейное преобразование между четырьмя тангенциальными компонентами электрического и магнитного полей на входе и выходе оптической системы для которых справедливо следующее матричное выражение:

$$\frac{\partial}{\partial z} \Psi = \frac{i\omega}{c} \Delta \Psi$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} E_x \\ H_x \\ E_y \\ -H_y \end{pmatrix}$$

Ψ - вектор столбец, содержащий, в общем случае, все тангенциальные компоненты

электрического и магнитного полей

$$\Psi \exp(ikr - i\omega t)$$

$$k = (k_x, k_y, k_z)$$

$$K = \omega/c = 2\pi/\lambda$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} -\frac{k_x}{K} \frac{\epsilon_{zx}}{\epsilon_{zz}} & 1 - \left(\frac{k_x}{K}\right)^2 \frac{1}{\epsilon_{zz}} & -\frac{k_x}{K} \frac{\epsilon_{zy}}{\epsilon_{zz}} & -\left(\frac{k_x}{K}\right) \left(\frac{k_y}{K}\right) \frac{1}{\epsilon_{zz}} \\ \epsilon_{xx} - \frac{\epsilon_{zx}\epsilon_{xz}}{\epsilon_{zz}} - \left(\frac{k_y}{K}\right)^2 & -\frac{k_x}{K} \frac{\epsilon_{xz}}{\epsilon_{zz}} & \epsilon_{xy} - \frac{\epsilon_{zy}\epsilon_{xz}}{\epsilon_{zz}} + \left(\frac{k_x}{K}\right) \left(\frac{k_y}{K}\right) & -\frac{k_y}{K} \frac{\epsilon_{xz}}{\epsilon_{zz}} \\ -\frac{k_y}{K} \frac{\epsilon_{zx}}{\epsilon_{zz}} & -\left(\frac{k_x}{K}\right) \left(\frac{k_y}{K}\right) \frac{1}{\epsilon_{zz}} & -\frac{k_y}{K} \frac{\epsilon_{zy}}{\epsilon_{zz}} & 1 - \left(\frac{k_y}{K}\right)^2 \frac{1}{\epsilon_{zz}} \\ \epsilon_{yx} - \frac{\epsilon_{yz}\epsilon_{zx}}{\epsilon_{zz}} + \left(\frac{k_x}{K}\right) \left(\frac{k_y}{K}\right) & -\frac{k_x}{K} \frac{\epsilon_{yz}}{\epsilon_{zz}} & \epsilon_{yy} - \frac{\epsilon_{yz}\epsilon_{zy}}{\epsilon_{zz}} - \left(\frac{k_x}{K}\right)^2 & -\frac{k_y}{K} \frac{\epsilon_{yz}}{\epsilon_{zz}} \end{pmatrix}$$

Berreman D. W., "Optics in stratified and anisotropic media: 4 x 4-matrix formulation," Journal of the Optical Society of America, 62(4), 1157-1160 (1972).

Palto S. P., "An Algorithm for Solving the Optical Problem for Stratified Anisotropic Media," Journal of Experimental & Theoretical Physics 92(4), 552-562 (2001).

D. A. Yakovlev, V. G. Chigrinov, Modeling and optimization of the LCD optical performance (Hoi-Sing Kwok. Wiley. United Kingdom, 2015

Метод Матриц Берремана 4x4

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}_{xyz} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} + \Delta\varepsilon c_1^2 & \Delta\varepsilon c_1 c_2 & \Delta\varepsilon c_1 c_3 \\ \Delta\varepsilon c_1 c_2 & \varepsilon_{\perp} + \Delta\varepsilon c_2^2 & \Delta\varepsilon c_2 c_3 \\ \Delta\varepsilon c_1 c_3 & \Delta\varepsilon c_2 c_3 & \varepsilon_{\perp} + \Delta\varepsilon c_3^2 \end{pmatrix} \quad \Delta\varepsilon = \varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}$$

$\varepsilon_{\perp}$ и $\varepsilon_{\parallel}$ – значения диэлектрической проницаемости в поперечном и продольном направлении рассматриваемой структуры

$c(c_1, c_2, c_3)$ – единичный вектор параллельный оптической оси

θ, φ, ψ – углы Эйлера

$$c_1 = \sin \theta \sin \varphi$$

$$c_2 = \sin \theta \cos \varphi$$

$$c_3 = \cos \theta$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{\perp} + (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \sin^2 \theta \sin^2 \varphi$$

$$\varepsilon_{12} = -(\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\varepsilon_{13} = (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \sin \theta \cos \theta \sin \varphi$$

$$\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12}$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{\perp} + (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \sin^2 \theta \cos^2 \varphi$$

$$\varepsilon_{23} = -(\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \sin \theta \cos \theta \cos \varphi$$

$$\varepsilon_{31} = \varepsilon_{13}$$

$$\varepsilon_{32} = \varepsilon_{23}$$

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{\perp} + (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \cos^2 \theta$$

Для среды толщиной h , электромагнитные поля падающей, отраженной и прошедшей волн, связаны соотношением:

$$\Psi_T = \mathbf{P}(h)(\Psi_I + \Psi_R)$$

Ψ_T , Ψ_I и Ψ_R – векторы прошедшей, падающей и отраженной волн

$$\Psi_T = \begin{pmatrix} T_x \\ \frac{1}{\cos \alpha} T_x \\ T_y \\ \cos \alpha T_{y_x} \end{pmatrix}, \quad \Psi_I = \begin{pmatrix} E_x \\ \frac{1}{\cos \alpha} E_x \\ E_y \\ \cos \alpha E_y \end{pmatrix}, \quad \Psi_R = \begin{pmatrix} R_x \\ -\frac{1}{\cos \alpha} R_x \\ R_y \\ -\cos \alpha R_y \end{pmatrix}$$

$\mathbf{P}(h)$ -матрица распространения для гиперболического слоя толщиной h

$$\mathbf{P}(h) = \exp(i\omega h \Delta / c) \equiv \sum_{k=1}^4 \left(\exp(i\omega h \lambda_k / c) \frac{\prod_{i \neq k} (\Delta - \lambda_i \mathbf{I})}{\prod_{i \neq k} (\lambda_k - \lambda_i)} \right)$$

λ_{ik} - Собственные значения матрицы Δ

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\varepsilon_{\perp} - \left(\frac{ck_x}{\omega} \right)^2}, \quad \lambda_{3,4} = -\frac{1}{\varepsilon_{33}} \left[\varepsilon \frac{ck_x}{\omega} \cos \theta \sin \varphi \pm \sqrt{\varepsilon_{\perp} (\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{33} - (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon \sin \theta \cos^2 \varphi)) \left(\frac{ck_x}{\omega} \right)^2} \right].$$

$$T = \frac{|T_x / \cos \alpha|^2 + |T_y|^2}{|E_x / \cos \alpha|^2 + |E_y|^2}, \quad R = \frac{|R_x / \cos \alpha|^2 + |R_y|^2}{|E_x / \cos \alpha|^2 + |E_y|^2}$$

Conclusion

We evaluated a method of calculation of the wave propagation characteristics in the anisotropic two-components slab with hyperbolic type of dispersion. This method is relevant for many types of HM and allows to calculate the transmission, reflection, field distribution in the slab, the density of states and the threshold condition when active atoms or ions are embedded into medium.